

論 説

単極モーターの動作原理

中川 雅仁 北海道教育大学教育学部釧路校 北海道釧路市城山 1-15-55

単極モーターの動作原理について、理論的な考察及び計算を行った。特に、単極モーターの反作用は磁石に働くという誤解を解き、その上に立った解釈を与えた。すなわち、磁石（と流れる電流）の磁場により単極モーターの金属板部分に回転軸まわりの力のモーメントが働き、それによって回転するが、磁石には、金属板や導線に流れる電流からの力のモーメントは働かない。導線部分には金属板部分に働く回転軸まわりの力のモーメントと、大きさは同じで向きが反対の回転軸まわりの力のモーメントが働く。

1. はじめに

通常モーターは、電流の流れる向きを切り替えながら回転する。ところがこの切り替えなしに、つまり直流で動くモーターがあり、これを単極モーターと呼んでいる。

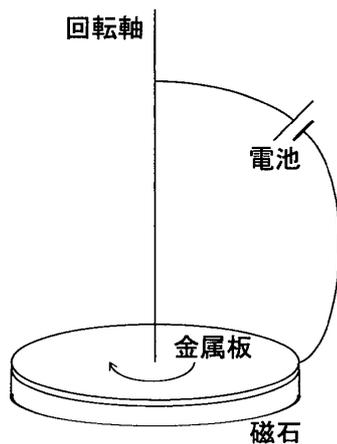


図1 単極モーター

例として、図1のような単極モーターを考える。磁石と導線は動かないように固定されているが、金属板は回転軸に支えられていて回転できる。導線の一方は金属板の端に、そしてもう一方は金属でできた回転軸に接して、すべることができる。導線の途中に電池等の直流電源を接続し、電流を流すと金属板は回転する。後に金属板と磁石が接合されているものを取り上げるが、これと区別するために、ここではこれを「分離型単極モーター」と呼ぶことにする。このような単極モーターの回路構成は非常に単純で、教育現場で使われることの多いクリップモーターを凌ぐほどである。また、かなり高速で回転するため、教育目的の利用に非常に効果的で、イベント等^{1), 2)}でも使われている。ただ、回路構成は単純でありながら、動作原理にかかわってかなりの混乱が見受けられ、研究^{3), 4)}が行われている。そこでこの論

文では、よくある誤解を解いた上で、理論的な考察及び計算を行った。

2. 動作原理

まず、動作原理について考えてみる。電流は、金属板の中心から導線の接している端の部分に流れる。この部分には磁石により磁場がかかっている（流れる電流による磁場もあるが、通常磁石による磁場に比べて小さい）ので力を受け、金属板が回転する。原理は単純にこれだけですみそうだが、もう少し深く考えてみる。金属板が回転するという事は、逆に回転するような力のモーメントが金属板以外の「何か」にかかっているはずである。この「何か」とは、単純な発想をすれば磁石ということになる。というのは、作用反作用の法則の概念を適用して、金属板が回転するのは磁場があるからであり、磁場は磁石によって発生しているからである。しかし後にこれは間違いであることがわかる。

次に、図1において、金属板と磁石を接合し、一緒に回転できるようにしたもの考える。これを「一体型単極モーター」と呼ぶことにする。もし上で考えたように、金属板の回転の反作用として磁石に反対向きの力のモーメントがかかるとすると、金属板と磁石が一体になっている場合には、打ち消しあって回転しないはずである。ところが、実際にやってみると回転する。これに対しては以下のような答えが考えられる。金属板と磁石には互いに反対向きの力のモーメントが及ぼしあっているが、導線に流れる電流が作る磁場によって磁石に力のモーメントが働くため、これも合計すると回転する、と考えることもできそうである²⁾。

しかしこの考えは正しくない、すなわち、以下の考察からわかるように、「金属板にかかる力のモーメントの反作用として磁石に反対向きの力のモーメントがかかる」あるいは「導線に流れる電流が作る磁場によって磁石に

力のモーメントが働く」というのは間違いである。磁石に働く力のモーメントについて、簡単なモデルで考えてみよう。まず磁石は、それが作るのと同じ磁場を与える電流（磁化電流）と等価である。簡単のために磁石の磁化電流は円形で、これが張る平面に垂直に回転軸があり、円の中心を通っているとす。この円電流に、外部から任意の磁場をかけても、円電流の各部分にかかる力は電流とは垂直の方向にある。ということは、作用線は回転軸を通るか回転軸に平行のどちらかになる。よって、円電流、すなわち磁石には力のモーメントは働かない。

磁石の磁場によって金属板に流れる電流が力のモーメントを受けるにもかかわらず、その逆はないというのは、角運動量保存の法則を満たさないのでは、間違っていると思われるかもしれない。しかしそれは今の場合問題ない。というのは、金属板に流れる電流は、単独では電流の両端で電荷が保存しないので、単独では存在し得ない。このような定常電流の一部分に対して角運動量保存の法則を満たさなければならぬ必然性はない。この根拠となっているのは、ビオ・サバルの法則から導かれる電流素片間に働く力は、作用反作用の法則を満たさない⁵⁾、という事実である。作用反作用の法則を満たさない系では運動量保存の法則を満たさず、角運動量保存の法則も満たさない。

結局のところ、磁石には導線からも金属板からも力のモーメントは働かない、ということになる。分離型も一体型も、磁石に働く力のモーメントはなく、金属板に力のモーメントがかかることによって回転する。

ただし、全体としては角運動量保存の法則を満たさなければならぬので、力のモーメントの和はゼロになっていなければならない。ということは、金属板とは反対向きの力のモーメントが、磁石とは異なる何かにかかっていなければならない。その何かとは、導線である。以下では、導線にかかる力のモーメントは、金属板にかかる力のモーメントとは、大きさは等しく向きは反対であることを計算によって示す。

3. 力のモーメントの計算

ここでは、金属板と導線に働く回転軸のまわりの力のモーメントは、大きさが等しく向きは反対であることを計算によって示す。

図2のように、金属板と導線、電池からなるモデルを考え、 x, y, z 軸をとる。金属板は十分薄い半径 R の円盤とする。導線は十分細く、 xz 平面内にあるとする。不要な議論を避けるため、電池は十分小さいと仮定する。

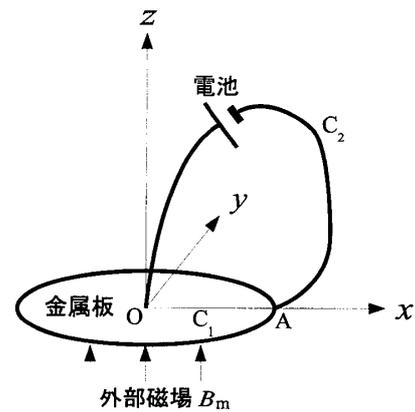


図2 単極モーターのモデル

経路 C_1 は、原点 O から x 軸に沿って金属板の端の点 A までの直線である。電流は金属板の表面を流れるが、この電流は経路 C_1 のみを流れるのではなく、広がって流れる。経路 C_2 は、点 A から原点 O までの導線に沿っている。

この系における磁場は、磁石によって作られる外部磁場 B_m と、流れる電流によって作られる磁場 B_c からなっている。 B_m は z 軸対称、すなわち、これを円柱座標系 (ρ, θ, z) で表したとき、 B_m の θ 方向成分は 0 で、 ρ 方向成分、 z 方向成分は θ に依存せず、 ρ と z のみに依存するとす。また、 B_m は金属板内では z 軸の方向に向いているとする。

まず、 B_c による金属板と導線に働く力のモーメントの合計は、 0 になる。というのは、 B_c は金属板と導線に流れる電流によって作られる磁場であり、これによって金属板と導線自身が力のモーメントを受けるからである。このことは一般に計算で示すことができ、付録に書いた。よって、 B_c による金属板と導線に働く力のモーメントは、大きさが等しく向きは反対である。以下では B_m による力のモーメントを考えることにする。

まず、導線（経路 C_2 ）に働く z 軸のまわりの力のモーメントを求める。微小な長さの導線が磁場中にあるときに受ける力は、 $dF_2 = -I \mathbf{B}_m \times ds$ であるから、経路 C_2 に働く原点 O のまわりの力のモーメント N_2 は、

$$N_2 = \int_{C_2} \mathbf{r} \times dF_2 \quad (1)$$

$$= -I \int_{C_2} \mathbf{r} \times (\mathbf{B}_m \times ds) \quad (2)$$

となる。興味のあるのは、 N_2 の z 方向成分 N_{2z} である。 N_{2z} は、 z 軸から ds までの距離を ρ とおくと、

$$N_{2z} = -I \int_{C_2} \rho e_z \cdot (\mathbf{B}_m \times ds) \quad (3)$$

単極モーターの動作原理

となる。ここで \mathbf{e}_2 は、 y 軸方向の単位ベクトルである。

次に、金属板に働く z 軸のまわりの力のモーメントを求める。ここでも磁場 \mathbf{B}_m によるもののみを考える。まず、金属板を流れる 2 次元の電流密度 (通常の電流密度を、金属板の高さの領域を積分区間として、 z で積分したものとせばよい。) を \mathbf{i} とおく。すると、微小な面積の部分から磁場から受ける力は、 $d\mathbf{F}_1 = -\mathbf{B}_m \times \mathbf{i} dS$ となり、金属板に働く原点 O のまわりの力のモーメント \mathbf{N}_1 は、

$$\mathbf{N}_1 = \int_S \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_1 \quad (4)$$

$$= - \int_S \mathbf{r} \times (\mathbf{B}_m \times \mathbf{i}) dS \quad (5)$$

$$= - \int_S \{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{i}) \mathbf{B}_m - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}_m) \mathbf{i}\} dS \quad (6)$$

となる。 xy 平面上の磁場 \mathbf{B}_m は、 z 軸方向を向いていると仮定しているので、 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}_m = 0$ となる。よって、

$$\mathbf{N}_1 = - \int_S (\mathbf{r} \cdot \mathbf{i}) \mathbf{B}_m dS \quad (7)$$

$$= - \int_0^R \mathbf{B}_m \rho d\rho \int_0^{2\pi} \mathbf{r} \cdot \mathbf{i} d\theta \quad (8)$$

となる。ここで電流 I は、

$$I = \int_0^{2\pi} \mathbf{r} \cdot \mathbf{i} d\theta \quad (9)$$

と表されるので、

$$\mathbf{N}_1 = -I \int_0^R \mathbf{B}_m \rho d\rho \quad (10)$$

となる。 \mathbf{N}_1 は z 軸方向を向いているので、 \mathbf{N}_{1z} は、

$$\mathbf{N}_{1z} = -I \int_0^R B_{mz} \rho d\rho \quad (11)$$

となる。

次に \mathbf{N}_{2z} と \mathbf{N}_{1z} は、大きさが等しく反対符号であることを示す。 z 軸を中心に経路 C_1 , C_2 を回転させたときにできる閉曲面 S' を考える。このとき、

$$\int_{S'} \mathbf{B}_m \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (12)$$

である。 \mathbf{n} は閉曲面 S' の法線ベクトルである。左辺は先に述べた \mathbf{B}_m の z 軸対称性を用いて、

$$\int_{S'} \mathbf{B}_m \cdot \mathbf{n} dS = -2\pi \int_{C_1+C_2} \rho \mathbf{e}_2 \cdot (\mathbf{B}_m \times d\mathbf{s}) \quad (13)$$

$$= -2\pi \left(\int_{C_1} \rho \mathbf{e}_2 \cdot (\mathbf{B}_m \times d\mathbf{s}) + \int_{C_2} \rho \mathbf{e}_2 \cdot (\mathbf{B}_m \times d\mathbf{s}) \right) \quad (14)$$

$$= -2\pi \left(\int_0^R B_{mz} \rho d\rho + \int_{C_2} \rho \mathbf{e}_2 \cdot (\mathbf{B}_m \times d\mathbf{s}) \right) \quad (15)$$

と書き換えられるので、式 (12) より、

$$\int_0^R B_{mz} \rho d\rho + \int_{C_2} \rho \mathbf{e}_2 \cdot (\mathbf{B}_m \times d\mathbf{s}) = 0 \quad (16)$$

となる。よって、式 (3) と式 (11) より

$$\mathbf{N}_{1z} + \mathbf{N}_{2z} = 0 \quad (17)$$

となる。すなわち、金属板に働く z 軸まわりの力のモーメントと、導線に働く z 軸まわりの力のモーメントは、大きさが等しく向きは反対となる。

4. まとめ

以上の結果、以下のように結論された。分離型一体型いずれにおいても、磁石 (と流れる電流) の磁場により単極モーターの金属板に回転軸まわりの力のモーメントが働き、それによって回転するが、磁石には、金属板や導線に流れる電流からの力のモーメントは働かない。導線には金属板に働く回転軸まわりの力のモーメントと、大きさは同じで向きが反対の回転軸まわりの力のモーメントが働く。

5. 付 録

電流分布が作る磁場により、その電流分布自身が力を受ける。定常電流のとき、この力による力のモーメントの総和は $\mathbf{0}$ になることを示す。すなわち、孤立した定常電流系は角運動量保存の法則を満たすことを示す。

ある閉曲面で囲まれた領域 V 中に電流分布 $\mathbf{i}(\mathbf{r})$ (ここでは通常の 3 次元の電流密度) があると、この閉曲面上では $\mathbf{i}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ とする。このとき、電流分布が受ける原点のまわりの力のモーメントは、

$$\mathbf{N} = \int_V \mathbf{r} \times (\mathbf{i}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) dV \quad (18)$$

となる。 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ は、この電流分布が作る磁場であり、

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (19)$$

で与えられる。よって、

$$N = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV \int_V dV' \left[\mathbf{r} \times \left\{ \mathbf{i}(\mathbf{r}) \times \left(\mathbf{i}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \right) \right\} \right] \quad (20)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV \int_V dV' \left\{ \left(\mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \right) (\mathbf{r} \times \mathbf{i}(\mathbf{r}')) - (\mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}')) \left(\mathbf{r} \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \right) \right\} \quad (21)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV \int_V dV' \left\{ - \left(\mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \nabla_r \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) (\mathbf{r} \times \mathbf{i}(\mathbf{r}')) + (\mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}')) \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \right\} \quad (22)$$

となる。

ここで右辺の第一項を整理するために、以下のような計算を行う。

$$\int_V dV \left(\mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \nabla_r \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \mathbf{r} \quad (23)$$

$$= \int_V dV \left(\nabla_r \cdot \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{\nabla_r \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \mathbf{r} \quad (24)$$

$$= \int_V dV \left(\nabla_r \cdot \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \mathbf{r} \quad (25)$$

$$= - \int_V dV \left(\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \quad (26)$$

式 (24) から式 (25) への計算では、定常電流のため

$\nabla_r \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ であることを使い、式 (25) から式 (26) への計算では、積分領域 V の表面で $\mathbf{i}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ であることを使った。

この結果を使うと、力のモーメント N は、

$$N = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV \int_V dV' \left\{ \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}) \times \mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + (\mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}')) \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \right\} \quad (27)$$

となる。この式の \mathbf{r} と \mathbf{r}' をすべて入れ替えて書き直すと、単に符号が反転するのみであることがわかる。こうしても値は変化しないはずなので、力のモーメント N は、

$$N = \mathbf{0} \quad (28)$$

でなければならない。

引用文献

- 1) 斎藤孝, 伊藤四郎: クギが回る単極回転 ('99 青少年のための科学の祭典全国大会).
- 2) 物理チャレンジ2006第2ステージ(全国物理コンテスト)の実験問題3とその解答, 内容は <http://www.phys-challenge.jp/syllabus.html> に掲載されている.
- 3) 木村元: <http://sysplan.nams.kyushu-u.ac.jp/gen/hobby/elec/Motor/UniMotor.html>
- 4) 石川昌司: http://socyo.high.hokudai.ac.jp/More_HTML/buturi/NEWS/bsn9909/a07.htm
- 5) 例えば, 理論電磁気学(第3版)(砂川重信著)の第5章例題2.

(2007年2月22日受理)